УДК: 517.9 (075.8)

Байдибекова А.О.*
педагог.ғ.к., доцент, М.Әуезов атындағы ОҚУ, Шымкент, Қазақстан

ӘЛ-ХОРЕЗМИ: АЛГЕБРАНЫҢ ДЕРБЕС ҒЫЛЫМ БОЛУЫ

Автор корреспондент: baidin6767@mail.ru

Түйін: Арабтардын арифметикасы, әл-Хорезмидің «Үнді есебінен» басталады. Мұның бірінші б-лігінде санаудың үнділік ондық позициялык жүйесі жөнінде түсінік берді, яғни мұнда кез-келген санды тоғыз «Үнді цифрлары» және нөл таңбасы арқылы қалай кескіндеуге болатыны көрсетіледі, екіншісінде бүтін сандарға, ал соңғы бөлімінде алпыстық және жай бөлшектерге амалдар қолдану ережелері айтылады, квадрат түбір табу әдістері көрсетіледі… Позициялық ондық жүйеде сандардың жазылу әдісін түсіндіре келіп, әл-Хорезми бірлік, ондык, жүздік және мыңдык атауларды ғана пайдаланып үлкен сандарды атауды үйретеді. Мысалы, 1180703051492803. Сонан кейін үнді үлгісі бойынша арифметикалық амалдар орындау мұқият түсіндіріледі амалдарды үлкен разрядтан бюста орындау талап етіледі. Әл-Хорезми екі еселеу және екіге белу өз алдына дербес амалдар деп санайды. Әл-Хорезмидің сандарды қандай цифрлар арқылы пайдаланғаны белгісіз, өйткені онын арифметикалық трактатының арабша қолжазбасы белгісіз, оның латынша аудармасы ғана бізге жеткен. Көптеген зерттеушілер Таяу және Орта Шығыс елдерінде қолданылып жүрген цифрларының бір варианты (біздіңше 1234 56789 10) пайдаланылған деген жорамал жасайды). Әл-Хорезми және баска араб математиктерінің бүтін сандарға амалдар қолдану жөніндегі үнділердің әдістерін көп жағдайда ықшамдап, жетілдіргені байқалады. Әсіресе, олардың сандардан түбір табу әдістерін жетілдіру туралы ізденістерінің маңызы зор болды. XV ғасырдағы көрнекті математик «Арифметика кілті» деп аталатын еңбегінде бүтін саннан кез-келген дәрежелі түбір табу әдісін келтіреді. Ол түбірдің бүтін бөлігін табу ежелгі Қытай математиктері енбектерінде келтірілген. Қазіргі Риффини-Горнер әдісіне сәйкес әл-Каши мұны қолдануды у 44240899506197 мысал арқылы түсіндіреді

Кілт сөздер: алгебра, үнді цифрлары, амалдар, бет, нүкте, философия, Араб астрономиясы, Ньютон биномы, Биномдық коэффициенттер, физикалық денелерден абстракциялануы

Әл-Хорезми толық есімі - Әбу Абдулла (немесе Әбу Жафар) Мұхаммед ибн Мұса әл-Хорезми) - Орта ғасырлық Ұлы ғалым - математик, астроном (жұлдызшы), тарихшы, географ. Әл Хорезмидің өмірі туралы мәліметтер өте аз сақталған. Әл-Хорезми есімі оның туған елін көрсетеді – ортаазиялық Хорезм мемлекеті. Әл-Хорезми жайында сақталған соңғы мәлімет 847 жылға сәйкес келеді. Оларға арифметика бойынша ең алғаш позициялық қағидаларға негізделген нұсқау жазылды. Сонымен қатар, оның алгебра және күнтізбе жайында трактаттары сақталды. Мұхаммед әйгілі «әл-жебр уәл-мұқабала кітабы» - «Қалпына келтіру және қарсы қою туралы кітап» кітабын (сызықты және квадратты теңдеулерді шешуге арналған) жазды, оның атынан "алгебра" атауы шықты. Оның алгебра бойынша трактатында геометрия, тригонометриялық кестелер және қалалардың ені мен ұзындығы жайында тараулар бар.

Әл-Хорезми нұсқауы арифметиканың дамуына өте маңызды рөл атқарды. Автордың есімі латындалған түрінде Algorismus және Algorithmus ортағасырлық Еуропада бүкіл ондық арифметика жүйесін білдіретін болды.

Геометрияның негізгі ұғымдарын баяндау олардың физикалық денелерден абстракциялануының төменгі сатысынан жоғары сатысына карай бағытталу керек, яғни «жекеден жалпыға көшу» жолы (дене-бет-сызық-нүкте); екінші жол бұған кері «жалпыдан жекеге» (нүкте-сызық-бет-нүкте) екінші жол қабылданған. Әл-Фараби оқыту мақсатында жазылған еңбектерінде бұл екі әдісті біріктіріп пайдалануды жақтайды. Жоғарыда Әл-Фарабидің Евклидті пифагоршіл және тек синтез әдісімен шектелген деп айтуының өзі осыған саяды. Ол ғылым жасау, баяндау барысында анализ бен синтез әдістерін ұштастырып отырудың кажеттілігін айтып кана коймай, өзінің ең басты шығармасы болып саналатын «Музыканың ұлы кітабында» осы принципті іс жүзіне асырудың тамаша үлгісін береді. Әл-Фарабидың ғылыми-методикалык бұл бастамасы да жаратылыстану ғылымдарының тарихында үлкен табыс болды. Әл-Фараби Евклидтен көп үйреніп, онын «Бастамаларын» өз заманына лайықтап пайдалана білген, алайда математиканы басқа жаратылыстану ғылымдарыың практикалық кәдесіне жаратуда ол Евклид және баска ежелгі грек математиктерінен әлдеқайда озық кетеді. Әл-Фарабидің бұл жаңашылдығының негізі оның философиялық, методологиялық дұрыс қағидаларды, принциптерді басшылыққа алып, ғылыми жаңа әдістерді қолдана білуінде жатыр. Әл-Фарабидін математиканы философияық негіздеу туралы ізденістері мен мұраттары математиканы дамытуда, оны оқытуда дұрыс бағыт-бағдар жол-жоба көрсетті деп нақты айтуға болады. Мәселен, оның Евклидтің «Бастамаларына» енбекті жаңаша, терең зерттеуге күшті ықпал жасайды. Әл-Фарабиден кейін өмір сүрген оның шәкірттері, ізбасарлары саналатын Орта Азия математиктері Әбу-Әли ибн Сина, Омар Хайям, Насыреддин ат-Туси тағы басқалары Евклид «Бастамаларына» арнайы түсініктемелер жазып, математикада елеулі жаңалықтар ашады.

АРАБТАРДЫҢ АРИФМЕТИКАСЫ

Арабтардың арифметикасы, әл-Хорезмидің «Үнді есебінен» басталады. Мұның бірінші белігінде санаудың үнділік ондық позициялык жүйесі жөнінде түсінік берді, яғни мұнда кез-келген санды тоғыз «Үнді цифрлары» және нөл танбасы арқылы қалай кескіндеуге болатыны көрсетіледі, екіншісінде бүтін сандарға, ал соңғы бөлімінде алпыстық және жай бөлшектерге амалдар қолдану ережелері айтылады, квадрат түбір табу әдістері көрсетіледі… Позициялық ондық жүйеде сандардың жазылу әдісін түсіндіре келіп әл-Хорезми бірлік, ондык. жүздік және мыңдык атауларды ғана пайдаланып үлкен сандарды атауды үйретеді. Мысалы, 1180703051492803. Сонан кейін үнді үлгісі бойынша арифметикалық Молдар орындау мұқият түсіндіріледі амалдарды үлкен разрядтан бастап орындау талап етіледі. Әл-Хорезми екі еселеу және екіге белу өз алдына дербес амалдар деп санайды.

Әл-Хорезмидің сандарды қандай цифрлар арқылы пайдаланғаны белгісіз, өйткені онын арифметикалық трактатының арабша қолжазбасы белгісіз, оның латынша аудармасы ғана бізге жеткен. Көптеген зерттеушілер Таяу және Орта Шығыс елдерінде қолданылып жүрген цифрларының бір варианты (біздінше 1234 56789 10) пайдаланылған деген жорымал жасайды). Әл-Хорезми және баска араб математиктерінің бүтін сандарға амалдар қолдану жөніндегі үнділердің әдістерін көп жағдайда ықшамдап, жетілдіргені байқалады. Әсіресе, олардың сандардан түбір табу әдістерін жетілдіру туралы ізденістерінің маңызы зор болды. XV ғасырдағы көрнекті математик «Арифметика кілті» деп аталатын еңбегінде бүтін саннан кез-келген дәрежелі түбір табу әдісін келтіреді. Ол түбірдің бүтін бөлігін табу ежелгі Кытай математиктері еңбектерінде келтірілген. Қазіргі Риффини-Горнер әдісіне сәйкес әл-Каши мұны қолдануды 44240899506197 мысал арқылы түсіндіреді. Бұл түбірдің иррационал болған жағдайда бөлшек бөлігін табу ушін екі мушені (биномды) кез келген натурал дәрежеге шығару ережесі келтіріледі. Бул біз білетін «Ньютон биномы».

Биномдық коэффициенттерді әл-Каши Сд -С + Ст, формуласына сай келетін аддитивтік ереже арқылы табады да, олардың п—9-ға дейінгі кестесін келтіреді.

9
36 8
8428 7
126 56 21 6
126 70 3515 5
8456 35 20 10 4
36 2821 15 10 6 3
9 8 7 65 4 3 2

Араб астрономиясында және бөлшек сандарды алпыстық жүйеде жазып, оларға амалдар қолдану ережелерін жетілдіруге үлкен мән берілген. Бұл жүйе бойынша 1-ден 59-

ға дейінгі әрбір сан араб алфавитінің әріптерімен кескінделеді. Мұны «Әбжад» немесе «Жумал» сандары деп атайды (ескіше окыған қазақтар мұны «әбжад есебі» деп атаған. Мұнда санның мәні әріптер мәндерінің косындысын береді, ондық әріптер бірлік әріптердің оң жағына жазылады. Нөл айрықша таңбамен белгіленеді. Басқа бүтін және бөлшек сандар нұсқаларда оларды атақты математик Омар Хаям көп колданылатын бүтін a #60»+an-1 60*-it. +a,+a_60-+ .. a+-m60-m турінде жазылады. Бөлшек разрядтар грек дәстүрі бойынша минут, секунд, тенцин т. с. бірлік заряд-градус, ал одан жоғары алпыстық зарядтар «бірінші көтерме» екінші көтерме т.с.с. аталған.

Алпыстық жүйеде жазылған сандарға амалдар қолдану мәселелері тағы да сол әл-Кашидің «Арифметика кілтінде» баяндалады. «Математика кілтінде» терең де толық математика тарихшыларының бір ауыздан құптауы бойынша материалдық байлығы, баяндау анықтамалары мен құрылымы жөнінде бүкіл орта ғасырлық әдебиеттердің ішінде Әл-Кашидің бұған пара-пар келер шығарма «Арифметика кілті» орыс тіліне аударып басылды. Әл-Кашидің әмірі мен қызметіне қатысты мағлұматтарды біз осы тараудың соңында мұнда әл-Каши өзіне дейінгі грек және араб математиктерінің бұл саладағы жетістіктерін қорытып баяндама дайындайды өз тарапынан да жаңалықтар қосады.

«Арифметика кілті» бес кітаптан турады: 1) сандар арифметикасы; 2) бөлшектер арифметикасы 3) астрономдар есебі туралы; 4) өлшеу туралы; 5) алгебра, жалған жору т. 6. Әдістер арқылы белгісіздерн табу туралы. «Арифметика кілті» бірнеше ғасыр бойы қайта-қайта көшіріліп кеңінен пайдаланылған 1889 ж. Тегеранда ол литографиялык тәсілмен басылып шықты.

Осы еңбектің бөлшектерге арналған екінші кітабын – әл-Каши тұңғыш рет ондық бөлшектер ұғымын енгізіп, оларға амалдар қолдану алпыстық бөлшектерді ондык бөлшектерге айналдыру жөнінде кеңес береді. Ондық бөлшектер Европа математикасында бұдан 150 жыл кейін пайда болып, жаппай қолданыла бастайды.

Араб математиктері теориялық арифметика мәселелерімен де көп шұғылданған. Анықталмаған тендеулерді шешу әдістерін негізінен Диофанттын «Арифметикасынан» және үнділерден алғандары байқалады. Бұл салада олардың жаңалығын көрсетуге болады. Орта Азиядан шыққан математик Әбу Мұхаммед әл-Ходженди (1000 жылдары өлген) х+у-28 анықталмаған тендеуінің рационал шешуі болмайтынын дәлелдеуге тырысады. Бұл атақты Ферм теоремасының ең бірінші дербес жағдайы.

«Ибн Корра Сабит р-3, 2»-1: 9-3: 2и-1— 1: г93 234-1 жай сандар болса, онда М- 2» р-ф жане /N-2»г сандары өзара қос сандар әрқайсысы екіншісінің бөлгіштерінің қосындысына тең болатынын көрсетеді. Мысалы. 2211 мен 284.

САН ҰҒЫМЫН КЕҢЕЙТУ

Алгебранын шын мәнінде Мухаммед әл-Хорезмидің «әл-жебр жане ал-Му-кабала тәсілімен есептеудін қыскаша кітабында» белгіленіп шыққан аударылып, Европа елдерінде алгебра жөнінде негізгі құрал болды. Өз алдына дербес Ғылым көп Кітап негізінен бірінші және екінші дәрежелі теңдеулерді шешуге арналған. Мұнда әл-Хорезми алгебраға жана мағына береді, оны арифметикадан беліп теңдеулер шешу женіндегі өнерге айналдырады. Ол тендеудің белгісізін «түбір» немесе «нәрсе» ал оның квадратын «мал» деп атайды.

Әл-Хорезми тендеуді теріс косылғыш болмайтындай етіп түрлендіреді. Сонда сызықтық және квадрат тендеулер мынадай алты түрге ажыратылады.

1) квадраттар тубірлерге тен ax^2= bx.
2) квадраттар санға тен ax^2=c,
3) тубірлер санға тен ax= c,
4) квадраттар мен тубірлер санға тең ax^2+ bx-c,
5) квадраттар мен сандар түбірлерге тең ax^2+ c- bx,
6) тубірлер мен сандар квадраттарға тең Ьx+c =ax^2

Кез келген тендеу осы түрлердін біріне келтірілуі керек. Мұнда кітаптың атында келтірілген «Әл-жебр» және «әл-мукабала» әдістері қолданылады. Әл-жебр амалы тендеудің бір жағында теріс мүше болса, одан құтылуға мумкіндік береді: екі жағына да сол мүшеге тең мүшелер қосылады. Әрі қарай әл-мукабала әдісі арқылы салыстыру арқылы ұқсас мүшелері біріктіріледі. Сонымен қатар квадрат теңдеулердің бас коэффициенті бірге келтіріледі. Өйткені әл-Хорезми трактатында оларды шешу ережелері осы жағдай үшін тұжырымдалған.

Мысалы, есеп шарты x—(10—x)2-58 немесе 2:34 +100-20x 58
түрінде әл-Жебр амалы арқылы 2x+ 100-58-+20x, сонан сон берілсе, 2-ге бөліп, әл-мукабала арқылы xa+21-10 яғни жоғарыда көрсетілген канондык түрің бесіншісіне келтіреді.

Әл-Хорезми шешудің казіргі квадрат тендеуді формуласына пара-пар сөз жүзінде шешу ережесін Әл-Хорезмидің келтіріп, онын дұрыстығын геометрияық дәлелдейді. Дәлелдеу сандар арқылы жүргізілгенмен оның дұрыстылығының жалпылылығына нұқсан келмейді оның Әл-Хорезмидің кейіннен араб жане Европа алгебрашылары қайталап көшірген x+ 10x-39 тендеуді қалай шешіп, оның дұрыстығы қалай дәлелденетінін шешу ережесінін қазіргі формулада калай өрнектелетінін керсетейік. «Квадрат және түбірлер санға тең, маселен бір квадрат және сол квадраттың 10 тубірі 39 саны бар болу үшін, яғни квадратқа оның 10 түбірін қосқандағы нәтиже 39-ға тең болу үшін ол квадрат қандай болу керек?

Шешу жолы: тубірлердің санын қақ бөл; сонда ол 5 болады. Бул санды өзіне-өзін көбейт, сонда 25 болады. Осы санга 39-ды қос, сонда 64 шығады. Енді 64-тен тубір тап, ол 8 болады. Бул түбірден түбірлер санының жартысы 5-ті алып таста, сонда 3 калады. Міне осы сан іздеп отырған квадраттың түбірі болады, ал квадраттың өзі 9-ға тен».

Әл-Хорезмидің алгебралық трактатында геометрия мәселелеріне арналған білім бар. Мұнда көптеген есептер теңдеу құру арқылы алгебралық әдіспен шешіледі.

Әл-Хорезмиден кейін алгебра саласында зерттеулер жургізіп, бұл ғылымды онан әрі дамытушылар ішінде шамамен 850-930 жылдары өмір сүрген Мысырдан шыққан математик Әбу Камил әл-Мисридты айрықша атау қажет. Ол «Алгебра және әл-мукабала» атты трактатың авторы. Әбу квадрат тендеулермен шектеледі. Алайда ол ал-Хорезмиге теориялық жағынан да, практикалык жағынан да кеп өзгерістер енгізеді. Әсіресе мысалдар көп келтіріледі және алгебралық түрлендірулерге көп көңіл бөледі. Ережелерді жатырқамай пайдаланады. Әбу Камил өлшемдес кесінділер қатынасы мен кесінділер қатынасын ажыратпайды; Бул екеуі не рационал, не иррационал сан болады деп қарайды. Осы сияқты Әбу Камилдің теңдеулер теориясында квадрат иррационалдықтар табиғаты арифметикалық обьектілер ретінде, яғни толық құқылы сандар ретінде кызмет атқарады. Олар тендеулердің түбірі де коэффициненттері түрінде де болып кездеседі. Бірінші жағдай әл-Хорезмиде өте сирек, ал екінші жағдай мүлде кездеспейді.

Мұндай мысалдар Әбу Камилдің еңбектерінде кездеседі. Алгебра қойнауындағы мұндай арифметикалық бағыт-бағдар нақты сандар ұғымының шығуының алгебрасында көп негізгі себепші болған алты шарттардың бірі ел біліп жаңалықтардың қадір-қасиетін жұрттан бұрын оны теориялық жағынан негіздеуші әл-Фараби болды. Ол алгебра ғылымының тұңғыш анықтамасын береді және алгебралық зерттеулердің табиғаты міндет-сандар ұғымын енгізуді қажет ететінін тұжырымдайды. Өзінің «Ғылымдар тізбегінде» ол алгебраны айла әрекеттер туралы ғылымға жатқызып былай анықтайтын; «Айла-әрекеттер жөніндегі ғылымның бір түріне сандық әдістер жатады. Бұлар әр түрлі болып келеді. Бұлардың ішінде қазіргі кезде алгебра әл-мукабала деп аталатын ғылым және тағы басқалар бар. Алгебра мен әл-мукабала алгебра мен геометрияға ортақ ғылым. Ол Евклидтің «Бастамаларының» оныншы кітабында және басқа еңбектерінде келтірілген рационал және иррационал шамалаға сәйкес сандарды табудың әр турлі әдістерін қарастырады. Рационал және иррационал шамалардың бір-біріне қатынасы сандар мен сандардың қатынасындай болатындықтан, әрбір сан өзінің шамасы (мелшері) бойынша рационал немесе иррационал шамаға тен болады. Сондықтан егер шамасы кейбір шамалаға тең сандар табылса онда белгілі бір әдіспен сол шамалардын өзі де табылады. Шамасы рационал шамаларга тен кейбір сандар рационал болып саналады, ол шамалар иррационал шамаларға тен кейбір сандар иррационал болып саналады».

Араб халифатының Орталығы болған Бағдад қаласындағы "Даналық үйі" болған. Бұл ғылыми Академияға халифаттың, дүние жүзінің түкіпір-түкпірінен данышпан ғалымдар жиналған және аса ірі обсерватория және ғылыми-тарихи қолжазбалар қоры мол кітапхана бар еді Әл-Хорезми өзінің ұрпаққа өлмес мұра етіп қалдырған төмендегідей 9 ірі көлемді шығармалардың авторы болып саналады:

1. Үндістан арифметикасы туралы кітап - Көне Үндістан есептерінің және амалдарының талдануына арналған;
2. Алгебра (Ал-джабр) және алмукабаланың есептеулері туралы қысқаша кітап - Алгебра ғылымының негізгі қағидалары мен амалдарын жинақтауға арналған;
3. Астрономиялық таблицалар (зидж) - Жұлдызнамалық еңбек, яғни аспан денелерінің, ғаламшарлардың қозғалысын зерттеуге арналған;
4. Жер шары бейнесінің кітабы - Планетамыздың жағрафиясы, яғни Жер бедерін, елдер мен өзен, көлдерді, таулар мен шөлдердің орналасуын анықтап, картаға түсіруге бағытталған;
5. Астролябияның көмегімен жасалатын зерттеу әдістері туралы кітап;
6. Күн сағаттары туралы кітап;
7. Еврейлер дәуірінің (пайғамбарлар дәуірі) сипаты және оның мейрамдары туралы трактат;
8. Тарих кітабы – адамзат тарихына арналған туынды.

Әдебиеттер тізімі

1 Кобесов А. Математика тарихы. Алматы, Қазақ университеті. 1993 ж
2 Кольман Э.Я. История математики в древности Москва. 1961 г
3 Жәутіков О.А. Математиканың даму тарихы. Алматы, 1967 ж
4 Аль Фараби. Комментарии к «Алмагесту», Птоломея. Алма-Ата. 1975 г

Аннотация: В этой статье рассмотрены Арифметика арабов начинается с «индийского счета» аль-Хорезми. Первая часть дает представление об индийской десятичной позиционной системе счета, то есть о том, как представить любое число девятью «индийскими цифрами» и знаком нуля, вторая часть описывает правила операций с целыми числами, а последняя часть описывает правила операций с шестнадцатеричными и простыми дробями. Аль-Хорезми объясняет способ записи чисел в позиционной десятичной системе счисления, десятичной. учит называть большие числа, используя только сотни и тысячи имен. Например, 1180703051492803. Тогда, согласно индийской модели, выполнение афиметрических форм требует выполнения чудодейственных пояснительных операций на крупномасштабном бюсте. Аль-Хорезми считает дублирование и разделение независимыми операциями. Неизвестно, под какими числами аль-Хорезми использовал числа, поскольку арабский манускрипт его арифметического трактата неизвестен, и сохранился только его латинский перевод. Многие исследователи предполагают, что использовался один из вариантов чисел, используемых на Ближнем Востоке (1234 56789 10 на наш взгляд). Аль-Хорезми и другие арабские математики в значительной степени упростили и усовершенствовали индийские методы применения операций с целыми числами. Особенно важен был их поиск способов найти корни чисел. Выдающийся математик 15 века в своей книге «Ключ к арифметике» дал метод нахождения любого квадратного корня из целого числа. Обнаружение целостности этого корня дается в трудах древнекитайских математиков. Согласно современному методу Риффини-Горнера, аль-Каши объясняет его использование на примере 44240899506197.

Ключевые слова: алгебра, индийские числа, операции, лица, точки, философия, арабская астрономия, бином Ньютона, биномиальные коэффициенты, абстракция от физических тел

Absract: This article discusses the arithmetic of the Arabs begins with the "Indian account" of al-Khwarizmi. The first part gives a representation of the Indian decimal positioning system of accounts, that is, as to represent any number of ninety "Indian figures" and the zero mark, the second part describes the rules of operations with the whole number of operations, the whole number. … Al-Khwarizmi explains the method of recording numbers in the positional decimal system of decimal, decimal. learns to call big numbers, using only hundreds and thousands of names. For example, 1180703051492803. Then, according to the Indian model, the performance of aphimetric forms requires the performance of miraculous explanatory operations on a large-scale bust. Al-Khwarizmi considers duplication and separation to be independent operations. It is not known under what numbers al-Khwarizmi used the number, since the Arabic manuscript of his arithmetic treatise is unknown, and only his Latin translation was preserved. Many researchers have suggested that one of the variants used in the Middle East (1234 56789 10 in our view). Al-Khwarizmi and other Arabic mathematicians simplified and perfected Indian methods of using operations with whole numbers. Especially important was their search for ways to find the root number. An outstanding mathematician of the 15th century in his book "The Key to Arithmetic" gave the method of finding any square root of the whole number. The discovery of the integrity of this root is given in the work of ancient Chinese mathematicians. Consistent with the modern Riffini-Gorner method, al-Kashi explains its use in Example 44240899506197.

Keywards: algebra, Indian numbers, operations, faces, points, philosophy, Arabic astronomy, Newton's binomial, binomial coefficients, abstraction from physical bodies